$= (3-u_n)\left(1-\dfrac{n}{2(n+1)}\right) = (3-u_n)\dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

b) On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n < 3 \Rightarrow 3-u_n > 0$ et $\dfrac{n+2}{2(n+1)} > 0$ d'où

$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et par suite (u_n) est une suite croissante.

3°/ La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc (u_n) est convergente.

4°/a) $v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1})$ or $u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ donc

$3-u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ et par suite

$v_{n+1} = (n+1)\cdot\dfrac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n) = \dfrac{n}{2}(3-u_n) = \dfrac{1}{2}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme

$v_1 = 3-u_1 = \dfrac{1}{2}$.

b) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ où q est la raison de la suite (v_n) d'où

$v_n = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5°/a) On a $v_n = n(3-u_n)$, pour $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 3-u_n = \dfrac{v_n}{n} \Rightarrow$

$u_n = 3 - \dfrac{v_n}{n}$. Or $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) On a : $-1 < \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Solution 6 :

1°/ $u_1 = \dfrac{3+2}{4} = \dfrac{5}{4}$; $v_1 = \dfrac{1+6}{4} = \dfrac{7}{4}$.

2°/a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

$= \dfrac{2u_n - 2v_n}{4} = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{2}\cdot w_n$